

Análisis Funcional Ejercicios

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Ejercicios

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2026

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Espacios normados	5
1.1.1. Cuestiones básicas	5
1.1.2. Ejemplos	5
1.1.3. Operadores y funcionales	6
1.1.4. Operaciones con espacios normados	7
1.1.5. Espacios de dimensión finita	8
1.2. Espacios de Hilbert	9
1.3. Teorema de Hahn-Banach	10
1.4. Dualidad y topologías débiles	12
1.5. El Ppio. de Acotación Uniforme	13

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Espacios normados

1.1.1. Cuestiones básicas

Ejercicio 1.1.1. Probar que dos normas en un mismo espacio vectorial son equivalentes si, y sólo si, dan lugar a los mismos conjuntos acotados.

Ejercicio 1.1.2. Si X es un espacio normado, para $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotamos por $B(x, r)$ a la bola cerrada de centro x y radio r . Para $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$, probar las siguientes equivalencias:

$$\text{a) } B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \iff \|x - y\| \leq r + \rho$$

$$\text{b) } B(x, r) \subset B(y, \rho) \iff \|x - y\| \leq \rho - r$$

Ejercicio 1.1.3. Sea X un espacio de Banach y $\{B_n\}$ una sucesión de bolas cerradas en X , que sea decreciente, es decir, $B_{n+1} \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.1.4. Probar que, si X es un espacio normado, para cualesquiera $x, y \in X \setminus \{0\}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x - y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}$$

Ejercicio 1.1.5. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio normado. Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.

b) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.

Dar un ejemplo en el que A y B sean cerrados pero $A + B$ no sea cerrado.

1.1.2. Ejemplos

Ejercicio 1.1.6. En el espacio vectorial $C^1[0, 1]$ formado por todas las funciones de clase C^1 en el intervalo $[0, 1]$, con valores en $\mathbb{K}$, se define

$$\|f\| = |f(0)| + \max\{|f'(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall f \in C^1[0, 1]$$

Probar que de esta forma se obtiene una norma completa en $C^1[0, 1]$.

Ejercicio 1.1.7. En el espacio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de escalares, se considera el subespacio definido por

$$X = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{n} < \infty \right\}$$

y se define una norma en X escribiendo

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{n} \quad \forall x \in X$$

Probar que con esta norma, X es un espacio de Banach.

Ejercicio 1.1.8. Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}$ en ℓ_1 :

- a) que converja a cero en ℓ_{∞} pero no esté acotada en ℓ_2 .
- b) que converja a cero en ℓ_2 pero no esté acotada en ℓ_1 .

Ejercicio 1.1.9. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in [0, 1]$ se define $f_n(t) = t^n - t^{n+1}$ y $g_n(t) = t^n - t^{2n}$. Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$:

- a) en el espacio de Banach $C[0, 1]$.
- b) en el espacio de Banach L_p , con $1 \leq p < \infty$.

Ejercicio 1.1.10. Se consideran los conjuntos

$$U = \{x \in c_0 : |x(n)| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad V = \{x \in \ell_{\infty} : |x(n)| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Probar que U es abierto en c_0 pero V no es abierto en ℓ_{∞} .

1.1.3. Operadores y funcionales

Ejercicio 1.1.11. Sean X e Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Supongamos que, para toda sucesión $\{x_n\}$ de vectores de X tal que $\{x_n\} \rightarrow 0$, se tiene que la sucesión $\{T(x_n)\}$ está acotada. Probar que T es continuo.

Ejercicio 1.1.12. En cada uno de los siguientes casos, probar que la aplicación $f \mapsto T(f)$ es un operador lineal continuo de $C[0, 1]$ en sí mismo, y calcular su norma:

- I) $[T(f)](t) = \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, 1], \forall f \in C[0, 1]$
- II) $[T(f)](t) = t^2 f(0) \quad \forall t \in [0, 1], \forall f \in C[0, 1]$
- III) $[T(f)](t) = f(t^2) \quad \forall t \in [0, 1], \forall f \in C[0, 1]$

Ejercicio 1.1.13. Fijada $g \in L_{\infty}[0, 1]$, probar que, para $1 \leq p \leq \infty$, la aplicación $f \mapsto fg$ es un operador lineal continuo de $L_p[0, 1]$ en sí mismo, y calcular su norma.

Ejercicio 1.1.14. Se considera el espacio normado $X = \{f \in C[0, 1] : f(1/2) = 0\}$, con la norma inducida por $C[0, 1]$, y el funcional lineal $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt \quad \forall f \in X$$

Probar que es continuo y calcular su norma.

Ejercicio 1.1.15. Sea $\{e_n\}$ la base de vectores unidad de c_0 . Probar que, para $f \in c_0^*$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) La función $|f|$ tiene máximo en la esfera unidad de c_0 .
- II) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$.

Dar un ejemplo en el que no se verifiquen estas afirmaciones.

Ejercicio 1.1.16. Para $1 < p < \infty$, cualquier funcional lineal definido en ℓ_p alcanza su norma.

Ejercicio 1.1.17. Encontrar un operador lineal acotado de ℓ_2 en otro espacio de Banach que no alcance su norma (esto es, que el supremo que define su norma no sea un máximo).

1.1.4. Operaciones con espacios normados

Ejercicio 1.1.18. Dado un espacio normado X , sean $f, g \in X^* \setminus \{0\}$. Probar que los espacios normados $\ker f$ y $\ker g$, ambos con la norma inducida por X , son isomorfos. Dar un ejemplo en el que dichos espacios no sean isométricamente isomorfos.

Ejercicio 1.1.19. Si X e Y son espacios normados y $Z = X \times Y$ es el espacio normado producto, probar que Z^* es isomorfo al espacio de Banach producto $X^* \times Y^*$.

Ejercicio 1.1.20. En el espacio normado cociente ℓ_∞/c_0 , calcular la norma cociente $\|x + c_0\|$, para cada $x \in \ell_\infty$.

Ejercicio 1.1.21. En el espacio de Banach $C[0, 1]$ se considera el subespacio

$$M = \{g \in C[0, 1] : g(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1/2]\}$$

Probar que M es cerrado en $C[0, 1]$, y calcular la norma cociente $\|f + M\|$ para cada $f \in C[0, 1]$.

Ejercicio 1.1.22. Para $1 \leq p < \infty$, se consideran los subespacios de L_p definidos por

$$M = \{f \in L_p : f(t) = 0 \text{ c.t.p. } t \in [0, 1/2]\}$$

$$Z = \{f \in L_p : f(t) = 0 \text{ c.t.p. } t \in [1/2, 1]\}$$

Probar que $L_p = M \oplus Z$, suma topológica directa. Deducir que L_p es isomorfo al espacio de Banach producto $L_p \times L_p$.

1.1.5. Espacios de dimensión finita

Ejercicio 1.1.23. Sean X e Y espacios normados y supongamos que Y tiene dimensión finita. Probar que todo operador lineal sobreyectivo $T : X \rightarrow Y$ es una aplicación abierta.

Ejercicio 1.1.24. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ una función continua, y supongamos que existen dos sucesiones de escalares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(t) - a_n e^t - b_n e^{-t}|^4 dt = 0$$

Probar que existen $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $f(t) = a e^t + b e^{-t}$ para todo $t \in [0, 1]$.

Ejercicio 1.1.25. Probar que, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_N \in \mathbb{R}^+$ verificando que, si P es un polinomio de grado N con coeficientes complejos, se tiene:

$$\sum_{k=0}^N |P(k)| \leq C_N \int_0^1 |P(t)| dt$$

Ejercicio 1.1.26. Sea X un espacio normado y M un subespacio de dimensión finita de X , tal que $M \neq X$. Probar que existe $x \in X$ tal que $\|x\| = d(x, M) = 1$. Deducir que, si X tiene dimensión infinita, existe una sucesión $\{x_n\}$ en la esfera unidad de X , tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$.

Ejercicio 1.1.27. En el espacio de Banach $C[0, 1]$ se considera el subespacio

$$M = \left\{ f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$$

Probar que M es proximal en $C[0, 1]$.

1.2. Espacios de Hilbert

Ejercicio 1.2.1. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en la bola unidad de un espacio prehilbertiano. Probar que si $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2$ entonces $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Ejercicio 1.2.2. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio prehilbertiano X y $x \in X$ tal que $\{(x_n | x)\} \rightarrow \|x\|^2$ y $\{\|x_n\|\} \rightarrow \|x\|$. Probar que $\{x_n\} \rightarrow x$.

Ejercicio 1.2.3. Sea X un espacio prehilbertiano real. Demostrar que para $x, y \in X$ equivalen:

- a) $x \perp y$.
- b) $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- c) $\|x + ty\| \geq \|x\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.4. Calcular la proyección ortogonal en ℓ_2 sobre el subespacio M generado por los vectores $v_1 = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0, \dots)$ y $v_3 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

Ejercicio 1.2.5. Calcular el mínimo valor de la integral

$$\int_{-1}^1 |\operatorname{sen}(\pi t) - a - bt|^2 dt$$

para $a, b \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.2.6. Calcular el mínimo valor de

$$\int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$$

siendo a, b, c números reales.

Ejercicio 1.2.7. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(1) = x(2) = x(3)\}$. Probar que M es el complemento ortogonal del subespacio de ℓ_2 generado por los vectores $u = (1, -1, 0, 0, \dots)$ y $v = (0, 1, -1, 0, \dots)$. Obtener la descomposición de cualquier vector de ℓ_2 como suma de un elemento de M y otro de $M^\perp$.

1.3. Teorema de Hahn-Banach

Ejercicio 1.3.1. Sean φ, ψ dos seminormas en un espacio vectorial X , y sea $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal verificando que

$$|f(x)| \leq \varphi(x) + \psi(x) \quad \forall x \in X$$

Probar que existen dos funcionales lineales $g, h : X \rightarrow \mathbb{K}$ tales que:

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad |g(x)| \leq \varphi(x), \quad |h(x)| \leq \psi(x) \quad \forall x \in X$$

[Indicación: En el espacio vectorial $X \times X$ considérese la seminorma p definida por $p(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2)$ y en el subespacio $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ considérese el funcional lineal h definido por $h(x, x) = f(x)$.]

Ejercicio 1.3.2. Sean X un espacio normado real y M un subespacio vectorial de X . Probar que si $f, g \in M^*$ verifican que $|f(m)| + |g(m)| \leq \|m\|$ para todo $m \in M$, entonces existen $h, k \in X^*$ que extienden a f y g respectivamente y verifican

$$|h(x)| + |k(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$$

[Indicación: Considérense $f + g$ y $f - g$.]

Ejercicio 1.3.3. Sea X un espacio normado complejo, y $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ una función entera, es decir, derivable en todo punto de $\mathbb{C}$. Probar que, si f está acotada, entonces f es constante. (Se supone conocido el caso $X = \mathbb{C}$).

Ejercicio 1.3.4. Sea X un espacio de Banach y Z un subespacio cerrado de X^* , tal que $Z \neq X^*$. Supongamos que Z separa los puntos de X , es decir,

$$x \in X, \quad x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in Z \implies x = 0$$

Probar que X no es reflexivo.

Ejercicio 1.3.5. Probar que un subespacio de c_0 , con la norma inducida por c_0 , no puede ser isomorfo a ℓ_1 .

Ejercicio 1.3.6. Sean X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X . Probar que para cada operador $T \in L(M, \ell_\infty)$, existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ tal que $S|_M = T$ y $\|S\| = \|T\|$.

Ejercicio 1.3.7. Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado y $u \in X$. Probar que existe $f \in X^*$ tal que $|f(x)| \leq \text{dist}(x, M)$ para todo $x \in X$ y $f(u) = \text{dist}(u, M)$.

Ejercicio 1.3.8. Fijado $n \in \mathbb{N}$, probar que existe un funcional lineal y continuo f en $C[0, 1]$ verificando que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p de grado menor o igual que n . ¿Existe un funcional lineal y continuo f en $C[0, 1]$ tal que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p ?

Ejercicio 1.3.9. (Límites de Banach) Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $f_n : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ el funcional definido por

$$f_n(x) = \frac{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}{n} \quad (x \in \ell_\infty)$$

Sea $M = \{x \in \ell_\infty : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$ y definamos $f(x) = \lim_n f_n(x)$ ($x \in M$).

- a) Probar que $f_n \in \ell_\infty^*$ y que $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- b) Probar que M es un subespacio vectorial de ℓ_∞ que contiene al espacio c de las sucesiones convergentes.
- c) Probar que $f \in M^*$ con $\|f\| = 1$ y que $f(x) = \lim\{x_n\}$ para todo $x \in c$.
- d) Sea $\tau(x) = (x(2), x(3), \dots)$ para todo $x \in \ell_\infty$. Probar que $x - \tau(x) \in \ker(f) \subseteq M$ para todo $x \in \ell_\infty$.
- e) Deducir que existe $L \in \ell_\infty^*$, extensión de f , tal que $\|L\| = 1$ y $L(x) = L(\tau^n(x))$ para todo $x \in \ell_\infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.
- f) Probar que $L(0, 1/2, 0, 1/2, \dots) = 1/4$. [Indicación: comparar con $L(1/2, 0, 1/2, 0, \dots)$]. ¿Cuánto vale $L(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$?

Ejercicio 1.3.10. Sean A y B subconjuntos no vacíos, abiertos, convexos y disjuntos de un espacio normado X . Probar que existen $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{Re} f(a) < \alpha < \operatorname{Re} f(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. ¿Es siempre posible encontrar f tal que $\sup \operatorname{Re} f(A) < \inf \operatorname{Re} f(B)$?

1.4. Dualidad y topologías débiles

Ejercicio 1.4.1. Sea X un espacio de Banach, $\{x_n\} \subset X$, $\{f_n\} \subset X^*$ tales que $\{x_n\}$ converge débilmente a $x \in X$ y $\{f_n\}$ converge en norma a $f \in X^*$. Prueba que $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$.

Ejercicio 1.4.2. En ℓ_∞ consideremos la siguiente sucesión de funcionales: para $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \ell_\infty^*$ está definido por

$$\varphi_n(x) = x(n) \quad \forall x \in \ell_\infty$$

Prueba que $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_{X^*}$ pero ninguna subsucesión de la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge en la topología débil-*, $\sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$. ¿Contradice esto el Teorema de Banach-Alaoglu?

Ejercicio 1.4.3. Consideremos los funcionales $\varphi_n \in C[-1, 1]^*$ dados por

$$\varphi_n(f) = f(-1/n) - f(1/n) \quad \forall f \in C[-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}$$

Prueba que $\{\varphi_n\} \rightarrow 0$ en la topología $\sigma(C[-1, 1]^*, C[-1, 1])$ pero no en la norma de $C[-1, 1]^*$.

Ejercicio 1.4.4. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\varphi_n(x) = \frac{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}{n} \quad \forall x \in c_0$$

- Prueba que $\varphi_n \in c_0^*$ y calcula su norma.
- Prueba que $\{\varphi_n\} \rightarrow 0$ en la topología $\sigma(c_0^*, c_0)$ pero no en la topología $\sigma(c_0^*, c_0^{**})$.

Ejercicio 1.4.5. Sea X un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Construye un operador lineal y continuo $T : X \rightarrow c_0$ que no alcance su norma. [Idea: prueba que existe una sucesión $\{x_n^*\} \subset S_{X^*}$ que converge a 0 en la topología $\sigma(X^*, X)$].

1.5. El Ppio. de Acotación Uniforme

Ejercicio 1.5.1. Probar que, en el espacio de Banach $C[0, 1]$, las funciones que son derivables en el punto $1/2$ forman un conjunto de primera categoría.

Ejercicio 1.5.2. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares y sea $1 < p < \infty$. Supongamos que, para todo $x \in \ell_p$, la serie

$$\sum_{n \geq 1} x(n)y(n)$$

está acotada. Probar que $y \in \ell_{p^*}$.

Ejercicio 1.5.3. Sean X e Y espacios de Banach y sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Probar que T es un monomorfismo si, y sólo si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta\|x\| \quad \forall x \in X$$

Ejercicio 1.5.4. Probar que el conjunto de los monomorfismos entre dos espacios de Banach es abierto en el espacio de todos los operadores lineales y continuos.

Ejercicio 1.5.5. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) Existe $S \in L(Y, X)$ tal que $S(T(x)) = x$ para todo $x \in X$.
- b) T es inyectivo y $T(X)$ es un subespacio complementado de Y .

Ejercicio 1.5.6. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) T es continua.
- b) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son normas equivalentes.
- c) $\|\cdot\|_1$ es una norma completa en X .

Ejercicio 1.5.7. Probar que no existe ninguna sucesión $u = \{u_n\}$ en $\mathbb{K}$ tal que, para toda sucesión $x = \{x_n\}$ en $\mathbb{K}$, se verifica que:

$$x \in \ell_1 \iff \{x_n u_n\} \text{ está acotada.}$$

[Sugerencia: Supuesta la existencia de una tal sucesión $u = \{u_n\}$, nótese que se puede suponer que todos sus términos son no nulos, y considérese para cada sucesión $x = \{x_n\}$ la sucesión $x' = \left\{\frac{x_n}{u_n}\right\}$, y demuéstrese que la aplicación $x \mapsto x'$ sería un isomorfismo topológico de ℓ_∞ sobre ℓ_1].

Ejercicio 1.5.8. Sea X un espacio de Banach real. Dada una aplicación lineal $T : X \rightarrow L_1([0, 1])$ se considera, para cada $A \subseteq [0, 1]$ medible, el funcional lineal $T_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$T_A(x) = \int_A T(x) dx$$

Probar que si $T_A \in X^*$ para todo $A \subseteq [0, 1]$ medible, entonces T es continua.

Ejercicio 1.5.9. Sean X un espacio de Banach real y $T : X \longrightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ una aplicación lineal. Se considera, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el funcional lineal $T_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$T_n(x) = \int_0^1 t^n T(x)(t) dt$$

Probar que si $T_n \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces T es continua.

Ejercicio 1.5.10. Sean (E, d) un espacio métrico y X un espacio normado. Probar que una función $F : E \longrightarrow X$ es lipschitziana si, y sólo si, para todo $x^* \in X^*$, la función $x^* \circ F : E \longrightarrow \mathbb{K}$ lo es.

Ejercicio 1.5.11. Sea $\mathcal{H}$ el espacio vectorial de las funciones enteras de variable compleja.

a) Probar que la fórmula

$$\|f\| = \max\{|f(z)| : |z| = 1\}$$

define una norma en $\mathcal{H}$.

b) Probar que la aplicación $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definida por

$$[F(f)](z) = f\left(\frac{z}{2}\right) \quad (f \in \mathcal{H}, z \in \mathbb{C})$$

es una biyección lineal y continua. (Indicación: Utilizar el principio del módulo máximo).

c) Probar que F^{-1} es discontinua.

d) ¿Es $\mathcal{H}$ un espacio de Banach?